

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 15.02.2025

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

Subiectul I

a) Demonstrați că $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}_+$. 4 p

b) Dacă x și y sunt numere reale pozitive care satisfac relația $\frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = x + y$, să se arate că 3 p

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \geq x + 2y$$

Soluție:

a) Oficiu..... 1 p

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} \cdot xy + \frac{y}{x} \cdot xy \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

b) $\frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = x + y \rightarrow (x + y)(xy^2 - 1) = 0$, dar $x, y > 0 \rightarrow xy^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{y^2}$ 1 p

$$\text{Vom avea: } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \geq x + 2y \Leftrightarrow \frac{1}{y^3} + y^3 + 1 \geq \frac{1}{y^2} + 2y \Leftrightarrow y^6 + y^3 + 1 \geq y + 2y^4 \Leftrightarrow$$

$$(y + 1)(y - 1)^2(y^3 + y^2 + 1) \geq 0$$

Subiectul II

Fie $E(x; y) = \frac{x+1}{2(y+2)}$ oricare ar fi x și y numere naturale. Arătați că dacă $E(x; y) = E(y; x)$, atunci 7 p

$x = y$.

Soluție:

Oficiu..... 1p

$$E(x; y) = E(y; x) \rightarrow \frac{x + 1}{2(y + 2)} = \frac{y + 1}{2(x + 2)}$$

$$2(x + 2)(x + 1) = 2(y + 2)(y + 1) \rightarrow x^2 + 3x + 2 = y^2 + 3y + 2$$

$$x^2 - y^2 + 3x - 3y = 0 \rightarrow (x + y)(x - y) + 3(x - y) = 0$$

$$(x - y)(x + y + 3) = 0, \text{ dar } x, y \in \mathbb{N} \rightarrow x + y + 3 \neq 0$$

$$x - y = 0 \rightarrow x = y$$

Subiectul III

Pe planul rombului ABCD, cu $AB = a$ și $\angle A = 60^\circ$ se ridică perpendiculara $DV = a$.

Dacă M și N sunt mijloacele laturilor VD, $\angle A$ respective VB, să se afle:

a) Distanța de la V la BC; 4 p

b) Măsura unghiului diedru dintre planele (AMN) și (ABCD). 3 p

Soluție:

a) Oficiu..... 1 p

Calculează $\angle BDC = 60^\circ$. Fie E piciorul perpendicularei din D pe BC. Cum $\triangle BDC$ echilateral,

$$\text{atunci } DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Conform teoremei celor trei perpendiculare $VE \perp BC$, deci distanța de la V la BC este VE..... 1 p

$$\text{Calculează } VE = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

b) NO linie mijlocie în $\triangle VBD \rightarrow NO \parallel VD$ deci $NO \perp (ABC)$ 1 p

Fie $d \parallel DB \rightarrow OA \perp d$, Conform teoremei celor 3 perpendiculare $AN \perp d$, deci

$$\angle((AMN); (ABC)) = \angle NAO$$

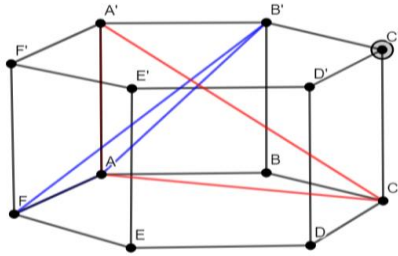
$$\text{Află } \angle NAO = 30^\circ$$

Subiectul IV

Fie prisma hexagonală regulată $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$.

- a) Demonstrați că planele $(AB'F)$ și $(AA'C)$ sunt perpendiculare. 3 p
- b) Știind că $AB = AA' = a, a > 0$, calculați tangenta unghiului dintre planele $(AB'F)$ și $(BB'F)$. 4 p

Soluție:



a) Oficiu 1p

$$\widehat{ABC} = 120^\circ$$

Triunghiul BAC isoscel de bază AC $\rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ \rightarrow$

$$\widehat{CAF} = 90^\circ \rightarrow AF \perp AC$$

AA' înălțime $\rightarrow AA' \perp (ABC), AC \in (ABC) \rightarrow AA' \perp AC$ 1 p

Avem $AF \perp (AA'C), AF \in (AB'F) \rightarrow (AB'F) \perp (AA'C)$ 1 p

b) $(AB'F) \cap (BB'F) = B'F$

Fie O mijlocul $B'F$ și $M \in BF, N \in AF$ astfel încât $MO \perp B'F$ și $NO \perp B'F$

Deci $\sphericalangle((AB'F); (BB'F)) = \sphericalangle MON$. 1 p

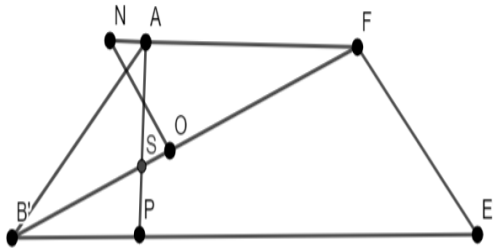
Calculează $B'F = 2a$ cu Pitagora, demonstrează că $\triangle FOM \sim \triangle FBB' \rightarrow OM = \frac{a\sqrt{3}}{3}, MF = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \rightarrow$

$$BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

1 p

Fie $P \in B'E'$ astfel încât $AP \perp B'E'$.

$$AP^2 = \frac{7a^2}{4};$$



$$B'P \parallel AF \rightarrow \triangle B'SP \sim \triangle FSA \rightarrow \frac{B'S}{SF} = \frac{PS}{AS} = \frac{1}{2} \rightarrow B'S = \frac{2a}{3}, SF = \frac{4a}{3}, PS = \frac{a\sqrt{7}}{6} \rightarrow AS = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

1 p

$$\triangle OFN \equiv \triangle FSA \rightarrow ON = \frac{a\sqrt{7}}{3}, NF = \frac{4a}{3}$$

$$\triangle MNF: \cos F = \frac{MF^2 + NF^2 - MN^2}{2MN \cdot NF} \rightarrow MN = \frac{2a}{3}$$

Cu teorema reciprocă a lui Pitagora, demonstrează că triunghiul OMN este dreptunghic în M \rightarrow

$$\tan \sphericalangle MON = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

1 p